

### Esercizio

Una sbarretta orizzontale di lunghezza  $b$ , massa  $m$  e resistenza  $R$  scivola senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza  $b$  e inclinate di  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale. Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m.  $\varepsilon$ . Il sistema è immerso in un campo magnetico  $B$  diretto secondo la verticale.

Calcolare:

1. il valore della f.e.m affinché la sbarretta rimanga ferma
2. la velocità limite  $v_\infty$  con cui la sbarretta scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito
3. la potenza  $P$  dissipata nella sbarretta quando questa scende con velocità  $v_\infty$ .

### Soluzione

Il generatore di f.e.m.  $\varepsilon$  fa circolare una corrente il cui valore è  $i = \frac{\varepsilon}{R}$ .

Sulla sbarretta agisce quindi una forza magnetica orizzontale (perpendicolare sia alla sbarretta che al campo magnetico) il cui modulo vale

$$F_M = |i\vec{b} \times \vec{B}| = \frac{\varepsilon}{R} bB$$

Affinché la sbarretta sia in equilibrio, la componente di questa forza lungo il piano deve bilanciare la componente della forza peso che tende a far scendere la sbarretta verso il basso:

$$F_M \cos \alpha = mg \sin \alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{mRg \tan \alpha}{bB}$$

Quando il generatore di f.e.m. è cortocircuitato e la sbarra è ferma non circola corrente. Nel momento in cui la sbarra inizia a scivolare verso il basso, il flusso del campo magnetico attraverso la spira CDEF cambia nel tempo e viene quindi indotta una forza elettromotrice  $\varepsilon_i$  che fa circolare una corrente indotta. Tale corrente ha verso antiorario, dovendo la forza magnetica sulla sbarretta opporsi allo spostamento verso il basso (legge di Lenz).

Il moto della sbarra lungo il piano inclinato (con asse rivolto verso il basso) è descritto dall'equazione

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - \frac{\varepsilon_i}{R} bB \cos \alpha$$

dove  $\varepsilon_i$  è il modulo della forza elettromotrice indotta che vale

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi_{\vec{B}}(t)}{dt} \right| = \left| \frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt} \right| = \left| \frac{BL(t+dt)b \cos \alpha - BL(t)b \cos \alpha}{dt} \right| = \left| \frac{B(L(t) - vdt)b \cos \alpha - BL(t)b \cos \alpha}{dt} \right| = Bbv \cos \alpha$$

essendo  $L(t)$  la distanza tra la sbarretta ed il filo CD all'istante  $t$ .

( $\varepsilon_i$  può essere ottenuto alternativamente considerando il flusso tagliato dalla sbarretta nel tempo  $dt$ , tempo in cui la

sbarretta si muove verso il basso di un tratto  $dx = vdt$ :  $\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi_{\vec{B}}(t)}{dt} \right| = \left| \frac{Bbvdt \cos \alpha}{dt} \right| = Bbv \cos \alpha$ )

La velocità limite viene raggiunta quando l'accelerazione  $a$  diventa nulla:

$$0 = ma = mg \sin \alpha - \frac{(bB \cos \alpha)^2 v}{R} \Rightarrow v_\infty = \frac{Rmg \sin \alpha}{(bB \cos \alpha)^2}$$

La potenza dissipata nella sbarretta, quando questa si muove con velocità limite, è

$$P = Ri_{ind}^2 = \frac{\varepsilon_i^2}{R} = \frac{(Bbv_\infty \cos \alpha)^2}{R} = R \left( \frac{mg \tan \alpha}{bB} \right)^2$$

ed è naturalmente uguale alla potenza fornita dalla forza peso:

$$P = \vec{F}_p \cdot \vec{v}_\infty = mg v_\infty \sin \alpha = R \left( \frac{mg \tan \alpha}{bB} \right)^2$$

